Exercice n° 4

$z_1 = 4 + 4i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

● $|z_1| = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Soit θ un argument de z_1, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\boxed{|z_1| = 4\sqrt{2} \text{ et Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}}$

De même on a :

$$|z_2| = \sqrt{^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ un argument de z_2, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Donc : $\boxed{|z_2| = 2 \text{ et Arg } z_2 = -\frac{\pi}{3}}$

● • $(z_1)^2 = [4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]^2 = [(4\sqrt{2})^2, 2x\frac{\pi}{4}]$

$= [32, \frac{\pi}{2}]$

• $|z_1 x z_2| = |z_1| x |z_2| = 4\sqrt{2} x 2 = 8\sqrt{2}$

$\text{Arg}(z_1 x z_2) \equiv \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(\frac{z_1}{z_2}) \equiv \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

• $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ et $\text{Arg}(\frac{1}{Z}) \equiv -\text{Arg}(Z)\ [2\pi]$

Donc comme $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}}$ il résulte que :

$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\text{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) \equiv -\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

Exercice n° 5

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $Z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi$

● $Z=0 \Leftrightarrow \text{Re}Z = 0$ et $\text{Im}Z = 0$

Donc Z est nul si et seulement si : $\cos^2\varphi = 0$

et $\sin\varphi.\cos\varphi = 0$ d'où $Z=0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Or comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on aura : $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

2) $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$

• Ecriture algébrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos^2\varphi + i\sin\varphi.\cos\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi.\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi.\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}}$$

$$= \frac{\cos^2\varphi - i\sin\varphi.\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

Donc : $\boxed{\frac{1}{Z} = 1 - i\,\text{tg}\varphi}$

• Ecriture trigonométrique de $\frac{1}{Z}$:

$$\frac{1}{Z} = 1 - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi} - i\frac{\sin\varphi.}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Comme $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cos\varphi > 0$

D'où $\boxed{\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos\varphi}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]}$

Carray.tn - Aqra Blech - Carray.tn